

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра «Теоретическая и прикладная механика»**

**МЕТОДЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ  
ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

Ростов - на - Дону 2022

Составители: доцент канд. техн. наук  
доцент

Кочетов В.А.  
Цандеков В.С.

Методы и примеры решения задач контрольных работ по теории механизмов и машин для студентов заочной формы

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Учебная работа студента-заочника по изучению курса теории механизмов и машин включает проработку теоретического материала по учебной литературе, решение типовых задач, выполнение и защиту контрольных и лабораторных работ, курсового проекта; сдачу зачетов и экзаменов.

Чтобы подготовиться к выполнению контрольных работ, следует изучить соответствующие разделы программы курса, которая изложена в работе [5], проанализировать примеры решения типовых задач, помещенные в задачник по теории механизмов и машин [4], и самостоятельно решить ряд задач.

Выполнив указанные рекомендации, студент получит практику самостоятельного решения частных задач анализа и синтеза механизмов и машин, а также подготовится к решению комплексных вопросов исследования и проектирования машинных агрегатов, предложенных в курсовом проекте по ТММ и специальным дисциплинам.

## Задача №1

### ОПРЕДЕЛИТЬ СТЕПЕНЬ ПОДВИЖНОСТИ МАШИННОГО АГРЕГАТА И ВЫПОЛНИТЬ СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ СХЕМЫ МЕХАНИЗМА РАБОЧЕЙ МАШИНЫ.

#### *Краткие методические указания*

Приступая к решению задачи №1, необходимо изучить теоретический материал по учебникам и учебным пособиям: [1] стр. 19-63; [2] стр. 18-59; [3] стр. 3-51.

**Цель** структурного анализа механизмов - изучение строения механизмов.

**Задачи** структурного анализа:

1. Установить, является ли данная кинематическая цепь механизмом.
2. Определить класс механизма, чтобы правильно выбрать метод кинематического и силового расчета данного механизма.
3. Написать формулу строения механизма и тем самым указать последовательность кинематического и силового расчетов исследуемого механизма.

Исходным для структурного анализа механизма является его кинематическая схема.

Условимся на кинематических схемах стойку механизма обозначить нулем, подвижные звенья - арабскими цифрами, а кинематические пары - латинскими буквами.

#### *Методика и пример решения задачи № 1*

Для данного машинного агрегата (рис.1), состоящего из двигателя, передаточного механизма (рис.2) и рабочей машины (рис.3), определить степень подвижности. Для схемы механизма рабочей машины провести полный структурный анализ.

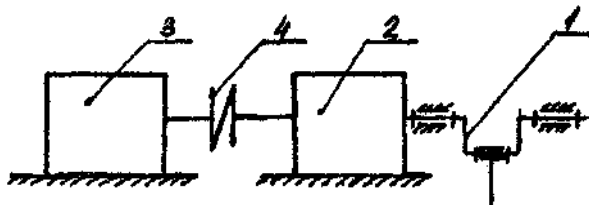


Рис 1. Машинный агрегат: 1— кривошип рабочей машины (см. рис.3),  
2 - передаточный зубчатый механизм (см. рис.2), 3 - двигатель,  
4 - соединительная муфта

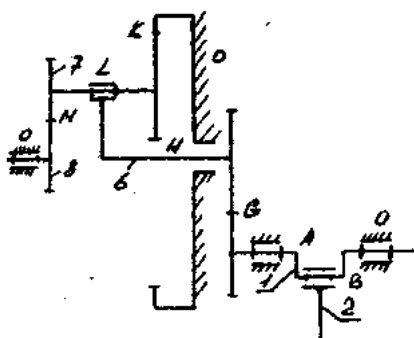


Рис.2. Схема передаточного механизма

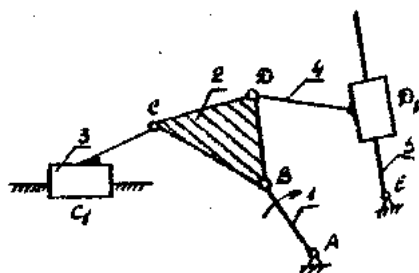


Рис.3. Схема механизма рабочей машины

### 1. Определение степени подвижности машинного агрегата

#### 1.1. Нумеруем звенья и обозначаем кинематические пары.

При этом учитываем, что на заданной схеме передаточного механизма кривошип, а следовательно, и жестко связанное с ним зубчатое колесо имеют номер 1, а образуемая этим звеном кинематическая пара со стойкой обозначена буквой А.

Последовательность нумерации звеньев может быть произвольной. Получили число подвижных звеньев  $n = 8$ .

1.2. Выделяем кинематические пары, определяя их наименование и класс по И.И. Артоблеву (табл.1).

Таблица 1

Обозначение кинематической пары	A	B	C	C <sub>1</sub>	D	D <sub>1</sub>	E	G	H	L	K	M	N
Звенья, образующие кинематическую пару	1,0	1,2	2,3	3,0	2,4	4,5	5,0	6,1	6,0	7,6	7,0	7,8	8,0
Наименование пары	Вращ.	Вращ.	Вращ.	Пост.	Вращ.	Пост.	Вращ.	Зубчат.	Вращ.	Вращ.	Зубчат.	Зубчат.	Вращ.
Класс пары	5	5	5	5	5	5	5	4	5	5	4	4	5

#### 1.3. Определяем степень подвижности по формуле П.Л. Чебышева

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - 1 \cdot P_4 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 10 - 1 \cdot 3 = 1,$$

где  $n = 8$  - число подвижных звеньев;  $P_5 = 10$  - число кинематических пар 5-го класса;  $P_4 = 3$  - число кинематических пар 4-го класса..

### 2. Полный структурный анализ схемы механизма рабочей машины

2.1. Наименование звеньев по характеру движения: 0 - стойка; 1 кривошип; 2 - шатун; 3 - ползун; 4 - шатун, кулисный камень; 5 - коромысло, кулиса.

## 2.2. Кинематические пары (табл.2).

Таблица 2

Обозначение кинематической пары	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>C</i> <sub>1</sub>	<i>D</i>	<i>D</i> <sub>1</sub>	<i>E</i>
Звенья, образующие кинематическую пару	1,0	1,2	2,3	3,0	2,4	4,5	5,0
Наименование пары	Вращ. низшая	Вращ. низшая	Вращ. низшая	Пост. низшая	Вращ. низшая	Пост. низшая	Вращ. низшая
Класс пары	5	5	5	5	5	5	5

## 2.3. Степень подвижности механизма

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - 1 \cdot P_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 0 = 1,$$

где  $n = 5$  - число подвижных звеньев;  $P_5 = 7$  - число кинематических пар 5-го класса;  $P_4 = 0$  - число кинематических пар 4-го класса.

## 2.4. Структурная схема (рис.4)

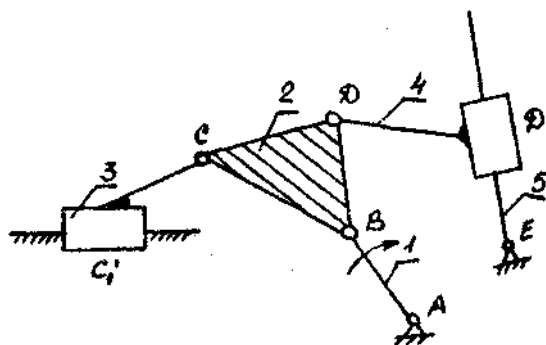


Рис.4. Структурная схема механизма

Заметим, что на структурных схемах имеет смысл звено, входящее в три и более кинематические пары, вычерчивать соответствующим жестким многоугольником, а ползуны и кулисные камни заменять соответствующим контуром.

## 2.5. Механизм первого класса (рис.5).



Рис.5. Механизм первого класса

## 2.6. Структурные группы Л.В.Ассура

2.6.1.Находим звено, наиболее удаленное от входного. Это звено 5.

2.6.2.Выделяем группу второго класса. Предполагаемую группу Асура образуют звенья 5 и 4.

2.6.3.Проверяем, будет ли эта цепь в данном механизме группой Асура. Отсоединяем мысленно звенья 5 и 4 вместе с кинематическими парами  $E$ ,  $D_1$ ,  $D$ . Оставшаяся кинематическая цепь (рис.6) будет замкнута и степень  $W$  её свободы будет равна единице. Значит, выделили группу Л.В.Асура.

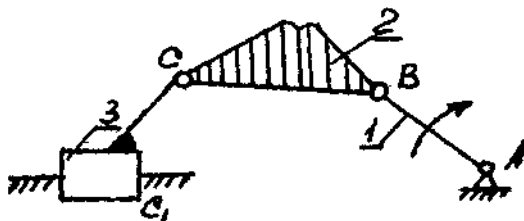
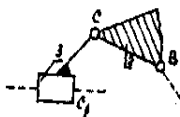


Рис.6. Кинематическая цепь

Для оставшейся кинематической цепи (см. рис.6) повторяем шаги 2.6.1 - 2.6.3 и убеждаемся, что звенья 2 и 3 вместе с кинематическими парами  $B$ ,  $C$  и  $C_1$  являются группой Л.В.Асура. Таким образом, для рассматриваемого примера имеем:



группа Л.В. Асура 2-го класса 2-го порядка 3-го вида



группа Л.В. Асура 2-го класса 2-го порядка 2-го вида

2.7. Класс всего механизма – второй

2.8. Формула строения механизма:

$$I(1,0) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5) .$$

## Задача №2

### ВЫПОЛНИТЬ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ШАРНИРНО-РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

#### Краткие методические указания

К кинематическому анализу шарнирно-рычажного механизма можно приступать только после решения задачи 1 и изучения теоретического материала по учебникам: [1] с.73-96; с.550-568 [3] с.35-43; [2] с.70; 75-86; 308-321.

Исходными для кинематического анализа механизма являются его кинематическая схема и закон движения входного звена.

**Цель** кинематического анализа: изучение движения звеньев отдельных точек без учета сил, вызывающих это движение.

**Задачи** кинематического анализа механизмов сводятся к определению: 1) положений всех звеньев при любом мгновенном положении входных звеньев; 2) траекторий и значений перемещений точек механизма; 3) линейных скоростей и ускорений точек механизма; 4) углов скоростей и ускорений звеньев механизма.

**Методы** решения задач кинематического анализа: графический, графоаналитический, аналитический и экспериментальный.

При решении задачи № 2 следует использовать графоаналитический метод.

Графоаналитический метод, основанный на составлении и графическом решении векторных уравнений путем построения планов скоростей и ускорений, дает удовлетворительную для инженерных расчетов точность, обладает простотой, наглядностью и достаточной для практики информативностью.

Заметим, что на плане скоростей (ускорений) механизма, векторы абсолютных скоростей (ускорений) выходят из полюса  $P$  плана скоростей (ускорений) механизма, а векторы относительных скоростей (ускорений) не проходят через полюс плана.

#### Методика и пример решения задачи № 2

Выполнить кинематический анализ шарнирно-рычажного механизма (рис.7,а) при следующих исходных данных:

закон движения входного звена  $\omega_1 = const$  с частотой вращения  $n = 477,7$  об/мин определяем по выражению

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 477,7}{30} = 50 \text{ с}^{-1},$$

ход звена 3 равен  $H_3 = 170$  мм;

линейные размеры:  $l_{BC} = H_3$ ;  $l_{BD} = l_{AE} = 2l_{AB}$ ;  $l_{EF} = 360$  мм;  $\angle CBD = 120^\circ$ ;  $\omega_1 = 45^\circ$ .

**1 этап. Метрический синтез механизма.** Звено  $AB$  будет кривошипом, если при вращении этого звена точка  $B$  пройдет последовательно положения  $B_I$  и  $B_{II}$ .

Поэтому

$$l_{AB} = \frac{H_3}{2} = \frac{170}{2} = 85 \text{ мм.}$$
$$l_{BC} = 2 \cdot 170 = 340 \text{ мм; } l_{BD} = l_{AE} = 2 \cdot 85 = 170 \text{ мм.}$$





**2 этап. Структурный анализ.** Структурный анализ механизма проведен при решении задачи № 1. Было установлено:

- 1) спроектирован механизм. Значит, с его кинематической схемой можно работать дальше;
- 2) спроектированный механизм второго класса. Следовательно, кинематический анализ можно проводить методами, предусмотренными рабочей программой [5];
- 3) Формула строения механизма имеет вид

$$I(1,0) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5).$$

**3 этап. План механизма.** Изобразим на плане механизма звено 1 отрезком  $AB=11,5$  (рис.7а). Тогда масштаб плана

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,085}{11,5} = 0,0074 \text{ м/мм.}$$

Длины остальных звеньев на плане будут равны

$$BD = AE = \frac{l_{BD}}{\mu_l} = \frac{0,17}{0,0074} = 23 \text{ мм,} \quad EF = \frac{l_{EF}}{\mu_l} = \frac{0,36}{0,0074} = 48,7 \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,34}{0,0074} = 46 \text{ мм.}$$

При построении плана положений сначала вычерчиваем неподвижные элементы кинематических пар  $A$  и  $E$ , а также ось направляющей в поступательной паре  $C_1$ . Выдержав угол  $\omega_1 = 45^\circ$ , вычерчиваем положение кривошипа. Методом засечек строим остальные звенья механизма.

**4 этап. Определение линейных скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма.** Определение скоростей начинаем с анализа механизма первого класса.

Механизм I класса (звенья  $I, O$ )

Модуль скорости точки  $B$

$$V_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 50 \cdot 0,085 = 4,25 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Изобразим скорость  $\bar{V}_B$  вектором  $\bar{P}_V b$ , отложенным из некоторой точки  $P_V$ , называемой полюсом плана скоростей (рис.7,б). Этот вектор направлен перпендикулярно  $AB$  в сторону, соответствующую направлению угловой скорости  $\omega_1$ . Длина отрезка  $P_V b$  может быть выбрана произвольно. В контрольной работе рекомендуется принимать  $P_V b \geq 100$  мм. Мы, исходя из площади чертежа, примем  $P_V b = 41$  мм. Тогда масштаб плана скоростей

$$\mu_v = \frac{V_B}{P_V b} = \frac{4,25}{41} = 0,1037 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

Переходим к анализу первой структурной группы

Группа 2-го класса 2-го порядка 2-го вида (звенья 2-3)

**Шаг 1.** Определяем внутреннюю и крайние кинематические пары группы.

Внутренней будет вращательная кинематическая пара  $C$ . Крайними кинематическими парами группы будут: вращательная пара  $B$  и поступательная пара  $C_1$ . Парой  $B$  рассматриваемая группа соединяется с предыдущей кинематической цепью, а парой  $C_1$  - со стойкой.

**Шаг 2.** для точки  $C$  составляем два векторных уравнения плоско-параллельного движения;

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}; \quad \bar{V}_C = \bar{V}_{C_0} + \bar{V}_{CC_0}, \quad (1)$$

где -  $\bar{V}_B$ ,  $\bar{V}_{C_0}$  скорости точки  $C$  в переносном движении. Вектор  $\bar{V}_B$  известен по величине и направлению из анализа механизма первого класса.

Вектор  $\bar{V}_{C_0} = 0$ , так как точка  $C_0$  принадлежит стойке 0;  $\bar{V}_{CB}$ ,  $\bar{V}_{CC_0}$  - скорости точки  $C$  в относительном движении. Известно только линии действия этих скоростей. Так как точки  $C$  и  $B$  принадлежат одному звену 2, то вектор  $\bar{V}_{CB}$  перпендикулярен прямой, соединяющей эти точки, т.е.  $\bar{V}_{CB} \perp CB$ .

Так как точки  $C$  и  $C_0$  принадлежат разным звеньям 3 и 0, образующим между собой поступательную пару, то вектор  $\bar{V}_{CC_0}$  параллелен направляющей в поступательной паре  $C_1$ , т.е.  $\bar{V}_{CC_0} \parallel AC$ .

*Шаг 3.* Решаем систему уравнений (1).

Решаем первое уравнение системы (1). Для этого из полюса плана скоростей откладываем вектор  $\bar{V}_B$  (он был отложен на рис.76). Вектор  $\bar{V}_{CB}$  записан после вектора  $\bar{V}_B$ . Следовательно, вектор  $\bar{V}_{CB}$  начинается в конце вектора  $\bar{V}_B$ . Отсюда построение: через точку  $b$  плана скоростей проводим прямую, перпендикулярную звену  $CB$ , представляющую собой линию действия вектора  $\bar{V}_{CB}$ .

Решая второе уравнение системы (1), из полюса  $P_v$  плана скоростей откладываем вектор  $\bar{V}_{C_0} = 0$  (нуль-вектор). Получаем, что точка  $C_0$  будет в полюсе плана. Вектор  $\bar{V}_{CC_0}$  записан в уравнении после вектора  $\bar{V}_{C_0}$ . Отсюда построение: через точку  $C_0$  плана скоростей проводим прямую, параллельную направляющей  $CA$ . Это - линия действия вектора  $\bar{V}_{CC_0}$ . Точка пересечения построенных линий действия векторов  $\bar{V}_{CB}$  и  $\bar{V}_{CC_0}$  (точка  $C$  на рис.76) определяет решение системы (1).

*Шаг 4.* Рассматриваемой группе принадлежит точка  $D_2$ , обозначенная на схеме механизма (см.рис.7а). Положение её на плане скоростей найдем, используя свойство подобия плана скоростей. Для этого на плане скоростей строим  $\Delta cb d_2$   $\Delta ACBD$  и сходственно с ним расположенный. Соединив точку  $d_2$  с полюсом  $P_v$  плана, получим вектор абсолютной скорости точки  $D_2$ , принадлежащей звену 2. Полученная фигура  $Pvc b d_2$  называется планом скоростей звена 2, вектор  $P_v c$  - план скоростей звена 3. Планом скоростей группы звеньев 2-3 является фигура  $Pvc b d_2$ .

*Шаг 5.* Используя план скоростей группы, находим: абсолютные скорости точек:

$$V_C = P_v c \cdot \mu_v = 33,8 \cdot 0,1037 = 3,51 \text{ м/с};$$

$$V_D = P_v d \cdot \mu_v = 38,2 \cdot 0,1037 = 3,97 \text{ м/с};$$

относительные скорости точек:

$$V_{CB} = cb \cdot \mu_v = 30 \cdot 0,1037 = 3,12 \text{ м/с};$$

$$V_{CC_0} = cc_0 \cdot \mu_v = 3,8 \cdot 0,1037 = 3,51 \text{ м/с};$$

угловые скорости звеньев:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{3,12}{0,34} = 9,17 \text{ 1/с};$$

$\omega_3 = 0$ , так как звено 3 не вращается.

Здесь  $P_v b$ ,  $P_v c$ ,  $P_v d$ ,  $cb$ ,  $cc_0$  – отрезки на плане скоростей, мм;  $\mu_v$  - масштаб плана скоростей,  $\frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$ .

Для определения направления  $\omega_2$  необходимо с плана скоростей перенести вектор  $\bar{V}_{CB}$  в точку  $C$  на схему механизма и посмотреть, куда этот вектор будет вращать точку  $C$  вокруг точки  $B$ . Видим, что  $\omega_2$  направлено против хода часовой стрелки. Теперь переходим к анализу второй структурной группы.

Группа 2-го класса 2-го порядка 3-го вида (звенья 4-5)

*Шаг 1.* Внутренняя пара - поступательная пара  $D_1$  крайние кинематические пары - это вращательные пары  $D$  и  $E$ .

*Шаг 2.* Векторные уравнения плоскопараллельного движения. Во внутренней кинематической паре группы Ассура 3 вида (и у группы 5 вида) есть две точки:  $D_4$  принадлежит звену 4 (см. рис.7а) и  $D_5$  принадлежит звену 5. Так как линейные размеры звена 4 не заданы, то звено 4 можно рассматривать как материальную точку, совпадающую с точкой  $D_2$ . Поэтому  $\bar{V}_{D_4} = \bar{V}_{D_2}$ . Неизвестна скорость точки  $D_5$ . Для неё и надо писать векторные уравнения. Они имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{D_5} &= \bar{V}_{D_2,4} + \bar{V}_{D_5 D_2,4}; \\ \bar{V}_{D_5} &= \bar{V}_E + \bar{V}_{D_5 E};\end{aligned}\quad (2)$$

где,  $\bar{V}_{D_2,4}$ ,  $\bar{V}_E$  - известные скорости точки  $D_5$  в переносном движении. Причем  $\bar{V}_E = 0$ , так как точка  $E$  принадлежит одновременно звену 5 и стойке 0. Скорость  $\bar{V}_{D_2} = \bar{V}_{D_5}$  найдена при анализе группы 2-3;  $\bar{V}_{D_5 D_2,4}$ ,  $\bar{V}_{D_5 E}$  скорости точки  $D_5$  в относительном движении. Известны только линии действия этих скоростей. Так как точки  $D_4$  и  $D_5$  принадлежат разным звеньям 4 и 5, образующим между собой поступательную пару, то вектор  $\bar{V}_{D_5 D_2,4}$  параллелен направляющей в поступательной паре, т.е.  $\bar{V}_{D_5 D_2,4} \parallel FE$ .

Так как точки  $D_5$  и  $E$  принадлежат одному звену 5, то вектор  $\bar{V}_{D_5 E}$  перпендикулярен прямой, соединяющей точки  $D_5$  и  $E$ , т.е.  $\bar{V}_{D_5 E} \perp DE$ .

*Шаг 3.* Решение системы (2) осуществляем построением из полюса  $P_v$  плана скоростей правой части каждого из уравнений системы. Так, решая первое уравнение системы (2), из полюса откладываем в масштабе  $\mu_v = 0,1037 \frac{м/с}{мм}$  вектор  $\bar{V}_{D_2} = \bar{V}_{D_4}$  (он уже отложен на рис.7б). Через точку  $d_4$  плана скоростей проводим прямую, параллельную звену 5, которая представляет собой линию действия вектора  $\bar{V}_{D_5 D_2,4}$ .

Решая второе уравнение системы (2), из полюса  $P_v$  плана скоростей откладываем вектор  $\bar{V}_E = 0$  (нуль-вектор). Получаем, что точка  $e$  будет в полюсе плана. Через точку  $e$  проводим прямую, перпендикулярную звену 5, представляющую собой линию действия вектора  $\bar{V}_{D_5 E}$ . Точка пересечения построенных линий действия  $\bar{V}_{D_5 D_2,4}$  (точка  $d_5$  на рис.7б) определяет решение системы (2).

*Шаг 4.* Рассматриваемой группе принадлежит точка  $E$ . Положение её на плане скоростей найдем, используя свойство подобия плана скоростей. Для этого составим пропорцию

$$\frac{FE}{D_5 E} = \frac{fe}{d_5 e} \Rightarrow fe = \frac{FE}{D_5 E} \cdot d_5 e,$$

где  $FE$ ,  $D_5 E$  - отрезки схемы механизма (рис.7а), мм;  $fe$ ,  $d_5 e$  - отрезки на плане скоростей, мм.

Полученные векторы  $\overline{P_v d_4}$  и  $\overline{P_v d_5 f}$  есть планы скоростей соответственно звеньев 4 и 5, а фигура  $P_v d_4 d_5 f$  - план скоростей группы звеньев 4-5.

*Шаг 5.* По плану скоростей находим абсолютные скорости точек:

$$\begin{aligned}V_{D_4} &= P_v d_4 \cdot \mu_v = 38,2 \cdot 0,1037 = 3,97 м/с; \\ V_{D_5} &= P_v d_5 \cdot \mu_v = 32,8 \cdot 0,1037 = 3,4 м/с; \\ V_F &= P_v f \cdot \mu_v = 43,4 \cdot 0,1037 = 4,5 м/с;\end{aligned}$$

относительные скорости точек:

$$V_{D_5 D_{2,4}} = d_5 d_{2,4} \cdot \mu_V = 19,1 \cdot 0,1037 = 1,98 \text{ м/с};$$

$$V_{D_5 E} = d_5 e \cdot \mu_V = 32,8 \cdot 0,1037 = 3,4 \text{ м/с};$$

угловые скорости звеньев:

$$\omega_5 = \frac{V_{D_5 E}}{l_{D_5 E}} = \frac{3,40}{36,7 \cdot 0,0074} = 12,51 \text{ 1/с};$$

$\omega_4 = \omega_5 = 12,51 \text{ 1/с}$  так как звенья 4 и 5 образуют поступательную пару. Здесь  $P_V d_4$ ;  $P_V d_5$ ;  $P_V f$ ;  $P_V d_4$ ;  $d_5 d_{2,4}$ ;  $d_5 e$  - отрезки на плане скоростей в мм.

Для определения направления  $\omega_5$  необходимо с плана скоростей перенести вектор  $\bar{V}_{D_5 E}$  в точку  $D_5$  на схему механизма и посмотреть, куда этот вектор будет вращать точку  $D_5$  вокруг точки  $E$ . Видим, что  $\omega_5$  направлено по ходу часовой стрелки.

**5 этап. Определение линейных ускорений точек и угловых ускорений звеньев механизма.** Определение ускорений начинаем с анализа механизма первого класса.

Механизм 1 класса (звенья 1,0)

Так как  $\omega_1 = \text{const}$  то для точки  $B$  кривошипа 1

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA}^n,$$

где  $\bar{a}_B$  - вектор абсолютного ускорения точки  $B$ ;  $\bar{a}_{BA}^n$  - вектор нормального ускорения точки  $B$  при вращении её относительно точки  $A$ .

Вектор  $\bar{a}_{BA}^n$  направлен по радиусу к центру вращения (от точки  $B$  к точке  $A$ ).

Модуль его равен

$$a_B = \bar{a}_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot l_{BA} = 50^2 \cdot 0,085 = 212,5 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим ускорение  $\bar{a}_B$  вектором  $\overline{P_a b}$  отложенным из не которой точки  $P_a$ , называемой полюсом плана ускорений (рис.7в). Длина отрезка  $P_a b$  может быть выбрана произвольно. В контрольной работе рекомендуется принимать  $P_a b \geq 100$  мм. Примем  $P_a b = 41$  мм. Тогда масштаб плана ускорений

$$\mu_a = \frac{a_B}{P_a b} = \frac{212,5}{41} = 5,18 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Структурная группа Ассура (звенья 2,3)

Переходим к построению плана ускорений группы Ассура 2-го класса 2-го порядка 2-го вида, образованной звеньями 2-3.

Для точки  $C$  внутренней кинематической пары группы Асура напишем два векторных уравнения плоско-параллельного движения

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_{C_0} + \bar{a}_{CC_0}, \quad (3)$$

где  $\bar{a}_B$ ,  $\bar{a}_{C_0}$  - ускорения точки  $C$  в переносном движении. Вектор  $\bar{a}_B$  известен по величине и направлению из анализа механизма первого класса. Вектор  $\bar{a}_{C_0} = 0$ , так как точка  $C_0$  принадлежит стойке 0;  $\bar{a}_{CB}$ ;  $\bar{a}_{CC_0}$  - ускорения точки  $C$  в относительном движении.

Так как точки  $C$  и  $B$  принадлежат одному звену, то вектор  $\vec{a}_{CB}$  надо раскладывать на нормальную и тангенциальную составляющие, т.е.

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau \quad (4)$$

где  $\vec{a}_{CB}^n$  - нормальная составляющая ускорения вращения точки  $C$  шатуна 2 относительно точки  $B$ .

Модуль этого ускорения

$$\vec{a}_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot l_{CB} = 9,17^2 \cdot 0,34 = 28,59 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\vec{a}_{CB}^n$  параллелен звену  $CB$  и направлен к центру вращения этого звена, т.е. от точки  $C$  к точке  $B$ .

На плане ускорений  $\vec{a}_{CB}^n$  отложим вектором

$$b \vec{n}_2 = \frac{\vec{a}_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{28,59}{5,18} = 5,52 \text{ мм},$$

$\vec{a}_{CB}^\tau$  - тангенциальная составляющая ускорения вращения точки  $C$  шатуна 2 относительно точки  $B$ . Известна только линия действия этого вектора - прямая, перпендикулярная звену  $CB$  - мгновенному радиусу вращения точки  $C$  относительно точки  $B$ .

Так как точки  $C$  и  $C_0$  принадлежат разным звеньям, образующим поступательную пару, то

$$\vec{a}_{CC_0} = \vec{a}_{CC_0}^{кор} + \vec{a}_{CC_0}^\tau, \quad (5)$$

где  $\vec{a}_{CC_0}^{кор}$  - вектор ускорения Кориолиса, определяемый по величине как

$$\vec{a}_{CC_0}^{кор} = 2 \cdot V_{CC_0} \cdot \omega_{пер} = 0, \text{ так как } \omega_{пер} = 0 - \text{угловая скорость вращения переносной}$$

среды (т.е. направляющей в поступательной паре);  $\vec{a}_{CC_0}^\tau$  - ускорение поступательного движения ползуна 3 по стойке. Известна лишь линия действия этого ускорения - прямая, параллельная направляющей в поступательной паре.

Подставим уравнения (4) и (5) в систему (3), получим:

$$\begin{aligned} \vec{a}_C &= \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau, \\ \vec{a}_C &= \vec{a}_{C_0} + \vec{a}_{CC_0}^{кор} + \vec{a}_{CC_0}^\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

Решаем систему (6) построением слагаемых правой части.

Из полюса  $P_a$  плана ускорений откладываем в масштабе  $\mu_a = 5,18 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$ . Он был уже отложен на рис.7в. Получим точку  $b$ . Далее согласно первому уравнению системы (6) из точки  $b$  плана ускорений откладываем вектор  $b \vec{n}_2 = 5,52 \text{ мм}$  и через полученную точку  $n_2$  проводим прямую, перпендикулярную звену  $CB$ . Это линия действия вектора  $\vec{a}_{CB}^\tau$ . Решаем второе уравнение системы (6). Из полюса  $P_a$  плана ускорений откладываем вектор  $\vec{a}_{C_0} = 0$ . К нему прибавляем вектор  $\vec{a}_{CC_0}^{кор} = 0$ . Заметим, что отложив два вектора (), мы продолжаем находиться в полюсе  $P_a$  плана. Через конец вектора  $\vec{a}_{CC_0}^{кор} = 0$  (т.е. через полюс  $P_a$  плана) проводим горизонталь. Это - линия действия вектора  $\vec{a}_{CC_0}^\tau$ .

Пересечение двух построенных на плане ускорений линий действия ускорений  $\vec{a}_{CB}^\tau$  и  $\vec{a}_{CC_0}^\tau$  даст точку  $c$ , определяющую решение системы векторных уравнений.

Положение точки  $D_2$  на плане ускорений найдем, используя свойство подобия плана ускорений.

Для этого на плане ускорений строим  $\Delta cbd_2$   $\Delta CBD$  и сходственно с ним расположенный. Соединив точку  $d_2$  с полюсом  $Pa$  плана, получим вектор абсолютного ускорения точки  $D_2$ .

Полученный вектор  $\overline{PaC}$  - есть план ускорений звена 3, а фигура  $PaCbn_2d_2$  - план ускорений звена 2 и всей группы, образованной звеньями 2 и 3.

Используя план ускорений группы, находим:  
абсолютные ускорения точек:

$$a_C = P_a C \cdot \mu_a = 30 \cdot 5,18 = 155,65 \text{ м/с}^2;$$

$$a_D = P_a d_2 \cdot \mu_a = 55,99 \cdot 5,18 = 290,07 \text{ м/с}^2;$$

относительные ускорения точек:

$$a_{CB} = cb \cdot \mu_a = 28,96 \cdot 5,18 = 149,99 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CC_0} = c_0c \cdot \mu_a = 30 \cdot 5,18 = 155,65 \text{ м/с}^2;$$

тангенциальное ускорение точки  $C$

$$a_{CB}^{\tau} = n_2c \cdot \mu_a = 28,1 \cdot 5,18 = 145,75 \text{ м/с}^2;$$

угловые ускорения звеньев

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{l_{CD}} = \frac{145,75}{0,34} = 428,66 \text{ с}^{-2}; \quad \varepsilon_3 = 0, \text{ так как звено 3 не вращается.}$$

Здесь  $P_ab$ ,  $P_aC$ ,  $P_ad_2$ ,  $cb$ ,  $c_0c$ ,  $n_2c$  - отрезки на плане ускорений, мм.

Для определения направления  $\varepsilon_2$  необходимо с плана скоростей перенести вектор  $a_{CB}^{\tau}$  в точку  $C$  на схему механизма и посмотреть, куда этот вектор будет вращать точку  $C$  вокруг точки  $B$ . Видим, что  $\varepsilon_2$  направлено против хода часовой стрелки.

Переходим к анализу второй структурной группы, образованной звеньями 4 и 5.

Выше было показано, что векторные уравнения надо писать для точки  $D_5$ . Они имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{a_{D_5}} &= \overline{a_{D_{2,4}}} + \overline{a_{D_5D_{2,4}}}; \\ \overline{a_{D_5}} &= \overline{a_E} + \overline{a_{D_5E}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\overline{a_{D_{2,4}}}$ ;  $\overline{a_E}$  - известные ускорения точки  $D_5$  в переносном движении.

Причем  $\overline{a_E} = 0$ , так как точка  $E$  принадлежит одновременно звену 5 и стойке 0. Ускорение  $\overline{a_{D_{2,4}}}$  найдено при анализе группы 2-3;  $\overline{a_{D_5E}}$  - ускорения точки  $D_5$  в относительном движении.

Так как точки  $D_5$  и  $D_4$  принадлежат разным звеньям 4 и 5, а эти звенья образуют между собой поступательную пару, то

$$\overline{a_{D_5D_{2,4}}} = \overline{a_{D_5D_{2,4}}}^{\text{кор}} + \overline{a_{D_5D_{2,4}}}^r, \quad (8)$$

где  $\overline{a_{D_5D_{2,4}}}^{\text{кор}}$  - вектор ускорения Кориолиса, определяемый по величине так:

$$a_{D_5D_{2,4}}^{\text{кор}} = 2 \cdot V_{D_5D_{2,4}} \cdot \omega_5 = 2 \cdot 1,98 \cdot 12,51 = 49,54 \text{ м/с}.$$

Для определения направления вектора  $\overline{a_{D_5D_{2,4}}}^{\text{кор}}$  необходимо повернуть вектор скорости  $\overline{V_{D_5D_{2,4}}}$  вокруг основания этого вектора на  $90^\circ$  в сторону  $\omega_5$ .

На плане ускорений вектор  $\overline{a_{D_5D_{2,4}}}^{\text{кор}}$  изобразится отрезком

$$d_4\kappa = \frac{a_{D_5D_{2,4}}^{кор}}{\mu_a} = \frac{49,54}{5,18} = 9,56 \text{ мм};$$

$\overline{a}_{D_5D_{2,4}}^r$  - ускорение поступательного движения кулисы (точки  $D_5$ ) относительно камня (точки  $D_4$ ). Известна лишь линия действия этого вектора - прямая, параллельная  $FE$  - линии хода кулисы относительно камня. Так как точки  $D_5$  и  $E$  принадлежат одному звену 5, то

$$\overline{a}_{D_5E} = \overline{a}_{D_5E}^n + \overline{a}_{D_5E}^{\tau} \quad (9)$$

где  $\overline{a}_{D_5E}^n$  - нормальная составляющая ускорения вращения точки  $D_5$  кулисы 5 относительно точки  $E$ .

Модуль этого ускорения

$$\overline{a}_{D_5E}^n = \frac{V_{D_5E}^2}{l_{D_5E}} = \omega_5^2 \cdot l_{D_5E} = 12,51^2 \cdot 36,7 \cdot 0,0074 = 42,5 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\overline{a}_{D_5E}^n$  параллелен звену  $DE$  и направлен к центру вращения этого звена, т.е. от точки  $D_5$  к точке  $E$ . На плане ускорений  $\overline{a}_{D_5E}^n$  отложим вектором

$$\overline{en_5} = \frac{\overline{a}_{D_5E}^n}{\mu_a} = \frac{42,57}{5,18} = 8,22 \text{ мм};$$

где  $\overline{a}_{D_5E}^{\tau}$  - тангенциальная составляющая ускорения вращения точки  $D_5$  кулисы относительно точки  $E$ .

Известна только линия действия этого вектора – перпендикулярно звену  $FE$ . Подставим уравнения (8) и (9) в систему (7). Получим:

$$\begin{aligned} \overline{a}_{D_5} &= \overline{a}_{D_{2,4}} + \overline{a}_{D_5D_{2,4}}^{кор} + \overline{a}_{D_5D_{2,4}}^r; \\ \overline{a}_{D_5} &= \overline{a}_E + \overline{a}_{D_5E}^n + \overline{a}_{D_5E}^{\tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Решаем систему (10) построением слагаемых правой части. Из полюса  $P_a$  плана ускорений откладываем в масштабе  $\mu_a = 5,18 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$  вектор  $\overline{a}_{D_2} = \overline{a}_{D_4}$  (см. рис.7в). Из точки  $d_4$  плана ускорений откладываем вектор  $\overline{d_4k}$ . Через точку  $k$  проводим прямую, параллельную  $FE$ . Это - линия действия вектора  $\overline{a}_{D_5D_{2,4}}^r$ .

Решая второе уравнение системы (10) из полюса  $P_a$  плана ускорений откладываем вектор  $\overline{a}_E = 0$  (нуль-вектор). Получаем, что точка  $e$  будет в полюсе плана. Из точки  $e$  откладываем вектор  $\overline{en_5}$  через конец которого (точку  $n_5$ ) проводим прямую, перпендикулярную звену  $FE$ . Это - линия действия тангенциального ускорения  $\overline{a}_{D_5E}^{\tau}$ .

Точка пересечения построенных линий действия векторов  $\overline{a}_{D_5D_{2,4}}^r$  и  $\overline{a}_{D_5E}^{\tau}$  - (точка  $d_5$ ) определяет решение системы (10).

Положение на плане ускорения точки  $F$  найдем, используя свойство подобия плана ускорений. Для этого составим пропорцию

$$\frac{FE}{D_5E} = \frac{fe}{D_5e} \Rightarrow fe = \frac{FE}{D_5E} \cdot D_5e,$$

где  $fe$ ,  $D_5e$  отрезки на плане ускорений, мм.



Полученный вектор  $\overline{P_a d_4}$  есть план ускорений звена 4, а фигура  $P_a d_4 k n_5 d_5 f$  - план ускорений группы и звена 5.

По плану ускорений находим:  
абсолютные ускорения точек:

$$a_{D_4} = P_a d_4 \cdot \mu_a = 55,99 \cdot 5,18 = 290,07 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{D_5} = P_a d_5 \cdot \mu_a = 8,47 \cdot 5,18 = 43,86 \text{ м/с}^2;$$

$$a_F = P_a f \cdot \mu_a = 11,2 \cdot 5,18 = 58,01 \text{ м/с}^2;$$

относительные ускорения точек:

$$a_{D_5 D_4} = k d_5 \cdot \mu_a = 46,98 \cdot 5,18 = 243,38 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{D_5 E} = e d_5 \cdot \mu_a = 8,47 \cdot 5,18 = 43,86 \text{ м/с}^2;$$

тангенциальное ускорение:

$$\overline{a_{D_5 E}^{\tau}} = n_5 d_5 \cdot \mu_a = 0,55 \cdot 5,18 = 2,83 \text{ м/с}^2;$$

угловые ускорения звеньев:

$$\varepsilon_5 = \frac{\overline{a_{D_5 E}^{\tau}}}{l_{D_5 E}} = \frac{2,83}{36,7 \cdot 0,0074} = 10,40 \text{ 1/с}^2;$$

$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 10,40 \text{ 1/с}^2$ , так как звенья 4 и 5 образуют между собой поступательную пару. Здесь

$P_a d_4$ ,  $P_a d_5$ ,  $P_a f$ ,  $k d_5$ ,  $e d_5$ ,  $n_5 d_5$  - отрезки на плане ускорений, мм.

Для определения направления  $\varepsilon_5$  необходимо с плана ускорений перенести вектор  $\overline{a_{D_5 E}^{\tau}}$  (вектор  $\overline{n_5 D_5}$ ) точку  $D_5$  на схему механизма и посмотреть, куда этот вектор будет вращать точку  $D_5$  вокруг точки  $E$ . Видим, что  $\varepsilon_5$  направлено против хода часовой стрелки.

В заключение решения задачи 2 определим характер движения звеньев механизма. Звено  $AB$  вращается с постоянной угловой скоростью (по условию задачи). Звено  $BC$  вращается замедленно, т.к.  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$  направлены в противоположные стороны. Звено  $C$  движется поступательно и ускоренно, так как векторы  $\overline{V_C}$  и  $\overline{a_C}$  сонаправлены. Звенья 4 и 5 вращаются замедленно, так как  $\omega_5$  и  $\varepsilon_5$  направлены в противоположные стороны. Звено 4 (камень) движется поступательно по звену 5 (кулисе) замедленно, так как векторы  $\overline{a_{D_4 D_5}}$  и  $\overline{V_{D_4 D_5}}$  ( $\overline{a_{D_4 D_5}} = -\overline{a_{D_5 D_4}}$ ) направлены в противоположные стороны.

### Задача № 3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОГО ОТНОШЕНИЯ ЗАМКНУТОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО МЕХАНИЗМА

### Краткие методические указания

Прежде чем приступить к решению задачи №3, необходимо изучить раздел кинематического анализа зубчатых механизмов по литературе [1] с.145+146; [2] с.402+427; [3] с.52+57.

Замкнутые дифференциальные механизмы являются одним из типов эпициклических передач, т.е. передач с подвижными осями. Получаются замкнутые дифференциальные механизмы из обычных дифференциальных механизмов, если два соосных вала соединяются (замыкаются) с ведущим или ведомым валом через какую-либо передачу (простую зубчатую или планетарную). Замкнутые дифференциальные механизмы имеют одну степень подвижности

$W=1$ , более высокий к.п.д., что объясняется возможностью разделения передаваемой мощности на два параллельных потока и позволяет реализовывать значительно большие крутящие моменты на выходе при малых габаритах привода. Такие передачи используются, как правило, в силовых приводах.

### Методика и пример решения задачи № 3

Для замкнутого дифференциального зубчатого редуктора (рис.8) определить передаточное отношение от входного вала  $I$  к валу подвижного корпуса барабана и частоту вращения барабана, если заданы числа зубьев колес  $Z_1 = Z_2 = Z_5 = Z_4 = 20$ ,  $Z_2 = Z_4 = 38$  и частота вращения вала  $n_1 = 2000 \text{ мин}^{-1}$ . Считать, что все колеса нулевые и имеют одинаковый модуль.

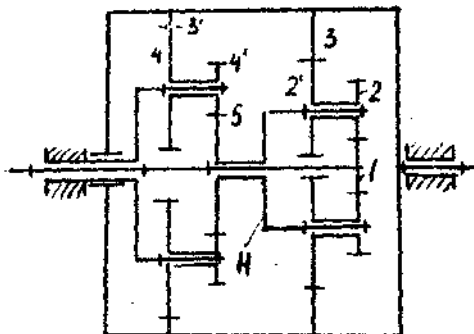


Рис.8. Замкнутый дифференциальный редуктор

#### 1. Анализ схемы механизма

В заданном механизме (см. рис.8) дифференциальная часть образуется зубчатыми колесами 1,2,2,3 и водилом  $H$ , жестко связанным с колесом 5. Замыкающая часть - это зубчатые колеса 5,4',4,3'. В замыкающей части блок колес 4 и 4' вращается относительно неподвижной оси.

#### 2. Записываем основную формулу дифференциального механизма (формулу Виллиса)

$$U_{k,l}^{(H)} = \frac{\omega_k - \omega_H}{\omega_l - \omega_H}, \quad (11)$$

где  $k, l$  - номера зубчатых колес;  $U_{k,l}^{(H)}$  - передаточное отношение обращенного механизма, получающегося из дифференциального, при остановке водила  $H$ ;  $\omega_k, \omega_l, \omega_H$  - угловые скорости колес с номерами  $k, l$  и водила  $H$ . В механизме на рис.8  $K=1, l=3$ . В других механизмах задачи № 3 может быть  $K=1, l=5$ .

Применительно к механизму на рис.8 формула (11) имеет вид

$$U_{1,3}^{(H)} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{\omega_1 - \omega_5}{\omega_3 - \omega_5}, \quad (12)$$

3. Делим каждое слагаемое правой части на  $\omega_3$ , являющуюся угловой скоростью барабана:

$$U_{13}^{(5)} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{\omega_5}{\omega_3}}{1 - \frac{\omega_5}{\omega_3}} = \frac{U_{13} - U_{53}}{1 - U_{53}}. \quad (13)$$

4. Разрешаем уравнение (13) относительно искомого передаточного отношения  $U_{13}$ :

$$U_{13} = U_{13}^{(5)} \cdot (1 - U_{53}) + U_{53}. \quad (14)$$

5. Выражаем передаточные отношения  $U_{53}$  и  $U_{13}^{(5)}$  через числа зубьев колес:

$$U_{53} = U_{53'} = U_{54'} \cdot U_{43'} = \left( -\frac{Z_{4'}}{Z_5} \right) \cdot \left( \frac{Z_{3'}}{Z_4} \right); \quad (15)$$

$$U_{13}^{(5)} = U_{12} \cdot U_{2'3} = \left( -\frac{Z_2}{Z_1} \right) \cdot \left( \frac{Z_3}{Z_{2'}} \right). \quad (16)$$

После подстановки (15) и (16) в (14) получим

$$U_{13} = -\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 \cdot Z_{2'}} \left( 1 + \frac{Z_{4'} \cdot Z_{3'}}{Z_3 \cdot Z_4} \right) - \frac{Z_{4'} \cdot Z_{3'}}{Z_5 \cdot Z_4}. \quad (17)$$

6. Определяем неизвестные числа зубьев колес  $Z_3$  и  $Z_{3'}$  из условий соосности:

$$a_{W_{34}} = a_{W_{4'5}}, \quad a_{W_{2'3}} = a_{W_{12}}.$$

Выражаем межосевые

расстояния через числа зубьев и

$$\frac{m(Z_{3'} - Z_4)}{2} = \frac{m(Z_{4'} + Z_5)}{2};$$

модуль:

$$\frac{m(Z_3 - Z_{2'})}{2} = \frac{m(Z_1 + Z_2)}{2},$$

после преобразования получим:

$$Z_{3'} = Z_4 + Z_5 + Z_{4'} = 20 + 20 + 38 = 78;$$

$$Z_3 = Z_1 + Z_2 + Z_{2'} = 20 + 38 + 20 = 78.$$

7. Подставляем численные значения в выражение (17),

$$U_{13} = -\frac{38}{20} \frac{78}{20} \left( 1 + \frac{38}{20} \frac{78}{20} \right) - \frac{38}{20} \frac{78}{20} = -69,73.$$

8. Определяем частоту вращения вала барабана

$$U_{13} = \frac{n_1}{n_3} \rightarrow n_3 = \frac{n_1}{U_{13}} = -\frac{2000}{69,73} = -28,68 \text{ мин}^{-1}.$$

## Л и т е р а т у р а

1. Артоблевский И.И. Теория механизмов и машин. - М.: Наука, 1988. - 639с.
2. Теория механизмов и машин: Учебник для вузов / Под ред. К.В. Фролова. - М.: Высш. шк., 1987. - 496с.
3. Тимофеев С.И. Теория механизмов и механика машин. 2011.
4. Лачуга Ю.Ф., Воскресенский А.Н., Чернов М.Ю. Теория механизмов и машин. Кинематика, динамика и расчет. М.: КолосС. 2007.